Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
на тему

“Гомологии пространств неособых гладких кривых”

Выполнил студент группы 4.11.1
Кулешов Николай Сергеевич

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор,
Васильев Виктор Анатольевич

Москва 2013

1 Инварианты каракулей порядка 5.

Данная работа посвящена изучению инвариантов каракулей пятого порядка. Инварианты меньшего порядка были вычислены А. Б. Мерковым и В. А. Васильевым в [2], [3]. Базовой техникой для поиска инвариантов является вычисление гомологий разрешенного дискриминанта, описанного в [2].

Для вычисления всех инвариантов пятого порядка (или доказательства их отсутствия), необходимо вычислить старшие гомологии члена F_5 основной фильтрации разрешенного дискриминанта, которая будет описана ниже. Этот член дополнительно подразбивается на два страта — f_1 и f_2. В данной работе вычисляются гомологии одного из них — f_1 — и показывается, что эти гомологии не дают вклада в инварианты. Кроме того, в работе описывается единственный цикл страта f_2, который может дать вклад в инварианты каракулей. Чтобы выяснить, получаются ли из этого цикла инварианты, нужно вычислить его границу во всём разрешенном дискриминанте.

1.1 Определения.

Первый подраздел данной работы содержит краткое изложение вводного материала, подробно разобранного в статье [3].

Каракулями называются гладкие отображения окружности в плоскость, удовлетворяющие следующему требованию. Ни для каких трёх точек $x, y, z \in S^1$ не выполняется ни одно из следующих условий:

$$\phi(x) = \phi(y) = \phi(z),$$

$$\phi(x) = \phi(y), \phi'(x) = 0,$$

$$\phi'(x) = \phi''(x) = 0.$$

Обозначим пространство каракулей через $\mathcal{K}$, а пространство всех гладких отображений $S^1 \to \mathbb{R}^2$ — через $\mathcal{Q}$.

Дискриминантом Σ называется множество $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{K}$.

Инвариантами каракулей называются функции на компонентах связности пространства $\mathcal{K}$. Многие инварианты получаются следующим образом. Используя конечномерную аппроксимацию, заменим пространство $\mathcal{Q}$ его конечномерным приближением $\mathbb{R}^\Delta$, где Δ — очень большое натуральное число, и будем обозначать через Σ пространство $\Sigma \bigcap \mathbb{R}^\Delta$.

Тогда можно применить к пространствам $\mathbb{R}^\Delta$ и Σ формулу двойственности Александера:

$$\widetilde{H}^i(\mathbb{R}^\Delta \setminus \Sigma) \simeq \overline{H}_{\Delta-1-i}(\Sigma),$$

где $\overline{H}_*$ — группа гомологий Бореля-Мура.

Таким образом, инварианты каракулей, принадлежащих пространству $\mathbb{R}^\Delta \subset \mathcal{Q}$, получаются из $(\Delta-1)$-мерных циклов дискриминанта.

Многие инварианты эффективно вычисляются в терминах геометрии дискриминанта $\Sigma \bigcap \mathbb{R}^\Delta$ и, что еще важнее, непосредственно стабилизируются при росте Δ, то есть при вложении $\mathbb{R}^\Delta$ в $\mathbb{R}^{\Delta'}$, $\Delta' > \Delta$, определяя в результате инварианты для всего пространства каракулей $\mathcal{K}$.

Для вычисления указанных выше циклов строится разрешение дискриминанта. Это фильтрованный комплекс, гомологии которого совпадают с гомологиями пространства Σ.

Элементарное определение порядка инвариантов дано в статье [3]. Мы будем пользоваться следующим определением. Инвариант каракулей (то есть элемент группы $H^0(\mathcal{Q}\setminus\Sigma)$) называется инвариантом порядка i, если при изоморфизме Александера ему соответствует класс в $\overline{H}_{\Delta-1}(\Sigma)$, являющийся прямым образом цикла, лежащего в члене F_i основной фильтрации.

В [2] доказано, что инварианты, имеющие такое происхождение, различают все неэквивалентные каракули.

1.2 Фильтрация.

Первый член фильтрации — F_2 — определяется как множество пар вида (abc, ϕ), где (abc) — тройка возможно совпадающих точек окружности, $\phi \in \Sigma$ — отображение, склеивающее точки a, b, и c. Таким образом F_2 — расслоение над конфигурационным пространством троек со слоем $\mathbb{R}^{\Delta-4}$.

Чтобы достроить член F_2 до F_3 нужно для каждой четвёрки точек на окружности и отображения ϕ, переводящего эти точки в одну точку плоскости, рассмотреть четыре тройки, входящие в выбранную четвёрку, в слое над каждой из этих троек выбрать точку соответствующую отображению ϕ и приклеить к полученным четырём точкам конус над ними. Тем самым, $F_3 \setminus F_2$ есть расслоение над пространством невырожденных четвёрок со слоем $\mathbb{R}^{\Delta-6} \times T$, где T — открытый четырёхножник (конус над четырьмя точками). При вырождении четвёрки в базе этого расслоения мы будем получать тройку точек, одна из которых будет двукратной, а слой-четырёхножник будет вырождаться в трёхножник.

Член F_4 представляет из себя объединение F_3 и еще одного пространства, которое имеет уже более сложную внутреннюю структуру чем $F_3 \setminus F_2$. Это объединение расслоений над пространством пятёрок и расслоения над пространством пар троек точек окружности.

Член $F_5 \setminus F_4$ также дополнительно разбивается в объединение двух пространств: $F_5 = f_1 \bigcup f_2$. Они соответствуют комбинаторно разным конфигурациям точек на окружности, накладывающим пять условий на отображение окружности в плоскость. А именно, можем выбрать шесть точек $a_1, \ldots a_6$ на окружности и потребовать чтобы образы этих точек при отображении ϕ совпадали:

$$\phi(a_1) = \ldots = \phi(a_6).$$

Или выбрать семь точек $a_1, \ldots a_7$ на окружности, разбитые на тройку и четвёрку и потребовать, чтобы отображение ϕ независимо склеивало первые три и оставшиеся четыре из них:

$$\phi(a_1) = \phi(a_2) = \phi(a_3), \quad \phi(a_4) = \ldots = \phi(a_7).$$

Пространство f_1 соответствует конфигурациям первого типа. Конфигурационное пространство шестёрок несовпадающих неупорядоченных точек на окружности имеет границу. Пространство f_1 получается склеиванием расслоения над пространством невырожденных шестёрок со слоем $\mathbb{R}^{\Delta-10} \times O$, и расслоений над вырожденными шестёрками со слоями $\mathbb{R}^{\Delta-10} \times \overline{O}$. Здесь $\mathbb{R}^{\Delta-10}$ – пространство отображений, склеивающих точки на такой конфигурации, O — порядковый комплекс соответствующий шестёрке, и $\overline{O}$ — порядковые комплексы, соответствующие вырожденным шестёркам точек на окружности и зависящие от степени вырождения. Они будут описаны ниже.

1.3 Порядковый комплекс.

Зафиксируем шестёрку точек на окружности и пронумеруем её точки против часовой стрелки.

Рассмотрим следующий порядковый комплекс.

Вершины комплекса расположены на четырёх уровнях и задаются подмножествами шестёрки точек на окружности. Единственная вершина верхнего уровня соответствует склеиванию всей шестёрки точек. Мы будем называть эту вершину главной. Шесть вершин третьего уровня соответствуют склеиванию пятёрок, лежащих в нашей шестёрке. Вершины второго уровня соответствуют склеиванию четвёрок. А вершины первого уровня соответствуют склеиванию троек. Таким образом, каждой вершине третьего уровня можно единственным образом сопоставить точку, которая не входит в соответствующую пятёрку. То есть точки третьего уровня нумеруются числами от одного до шести. Вершины второго уровня нумеруются неупорядоченными парами чисел от одного до шести, а именно номерами точек, которые не входят в соответствующую четвёрку. Вершины первого уровня нумеруются неупорядоченными тройками чисел по тому же принципу.

Две вершины соединяются ребром, если набор точек на окружности, определяющий одну из них, лежит в наборе, определяющем другую. Такие точки мы будем называть инцидентными друг другу.

Симплексы нашего комплекса натягиваются на монотонные последовательности вершин, то есть на наборы вершин разных уровней, такие что любые две вершины соответствуют инцидентным наборам точек на окружности. Максимальная размерность такого симплекса равна 3.

Трёхмерные симплексы задаются выбором одной вершины на каждом уровне, так что нижние инцидентны верхним. Таким образом, трёхмерный симплекс задаётся упорядоченным набором из трёх точек, принадлежащих нашей шестёрке. Через $\overline{abc}$ мы будем обозначать симплекс с вершинами в точках a, ab и abc.

Двумерные симплексы определяются тройками попарно инцидентных друг другу вершин комплекса. Мы будем рассматривать только такие симплексы, одна из вершин которых находится в главной вершине комплекса. Такие двумерные симплексы подразделяются на три типа. А именно, (1) грани, определяющиеся вершинами третьего и второго уровня, (2) грани, определяющиеся вершинами третьего и первого уровня и (3) грани, определяющиеся вершинами второго и первого уровня. Грани первого типа мы будем обозначать δ_{ab}, где a и ab — вершины соответственно третьего и второго уровней, определяющие нашу грань. Грани второго типа будем обозначать $\delta_{a.bc} = \delta_{a.cb}$, где a — вершина третьего уровня, abc – вершина первого уровня, определяющие нашу грань. Грани третьего типа обозначим через $\delta_{ab.c} = \delta_{ba.c}$, где ab — вершина второго уровня, abc – вершина первого уровня.

Ориентацию симплексов в каждой из размерностей зададим следующим образом. Главной вершине комплекса припишем число 1, всем вершинам третьего уровня число 2, вершинам второго уровня число 3 и вершинам первого уровня число 4. Таким образом, вершины каждого из симплексов упорядочены, что задаёт ориентацию на этих симплексах.

Приведённый порядковый комплекс в слое над шестёркой точек получается из построенного выбрасыванием всех вершин, рёбер и граней, имеющих пустое пересечение с главной вершиной. Таким образом остаётся одна вершина, 41 ребро, 150 граней и 120 трёхмерных симплексов.

Блок f_1 фильтрации разрешенного дискриминанта является объединением нескольких пространств, соответствующих более или менее вырожденным шестёркам точек на окружности. Его часть максимальной размерности является пространством расслоения над пространством невырожденных шестёрок точек, слой которого — это (канонически ориентируемое) подпространсво $\mathbb{R}^{\Delta-10} \subset \mathbb{R}^{\Delta}$ и наш приведённый порядковый комплекс, связанный с шестёркой точек базы. Путь в базе, задающий циклическую перестановку шести точек, нарушает её ориентацию, поэтому гомологии максимальной (равной $\Delta-10+6+3=\Delta-1$) размерности в f_1 порождаются трёхмерными циклами полученного комплекса, антиинвариантными относительно поворота в базе, переставляющего точки нашей шестёрки по циклу. Эти циклы вычисляются в следующих пунктах 1.4, 1.5.

1.4 Вычисление гомологий: первые редукции.

Заметим что каждая грань вида $\delta_{a.bc}$ входит в границу ровно двух 3-симплексов — $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$. Действительно, вершина a задаётся пятёркой точек на окружности. Вершина abc задаётся тройкой точек, лежащих в этой пятёрке. Для того чтобы задать симплекс, содержащий грань $\delta_{a.bc}$, нужно выбрать четвёрку точек, содержащую нашу тройку и содержащуюся в нашей пятёрке. Это можно сделать ровно двумя способами. Аналогично, грань $\delta_{ab.c}$ входит в границу только двух симплексов $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$.

Следовательно, если симплекс $\overline{abc}$ входит в какой-то цикл с коэффициентом λ, то в этот цикл входят также симплексы $\overline{bac}$ и $\overline{acb}$ с коэффициентом $-\lambda$. Иначе граница симплекса $\overline{abc}$ не сократится ни с какой другой частью границы нашего цикла.

Аналогично, в любой цикл вместе с симплексами $\overline{bac}$ и $\overline{acb}$ должны входить симплексы $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ с противоположными коэффициентами. И, наконец, вместе с симплексом $\overline{cab}$ должен входить симплекс $\overline{cba}$ с противоположным коэффициентом. Тем самым мы получили, что в любой цикл вместе с каждым слагаемым $\lambda\cdot\overline{abc}$ входят еще пять слагаемых вида $sgn(\sigma)\lambda\cdot\sigma(\overline{abc})$, где σ — перестановка чисел a, b и c.

Таким образом все 120 трёхмерных симплексов разбиваются на 20 блоков вида

$$\begin{array}{c} \overline{abc} \\ -\overline{acb} \\ -\overline{bac} \\ \overline{bca} \\ \overline{cab} \\ -\overline{cba} \end{array}$$

Суммарная граница каждого такого блока равна альтернированной сумме шести граней типа δ_{ab}:

$$\delta_{ab}-\delta_{ac}-\delta_{ba}+\delta_{bc}+\delta_{ca}-\delta_{cb}.$$

Циклы могут быть только линейными комбинациями этих блоков.

1.5 Условия антиинвариантности.

Рассмотрим теперь условия антиинвариантности. Если в антиинвариантный цикл входит симплекс $\overline{abc}$, то должна входить и вся его орибита под действием фундаментальной группы базы, которая порождается поворотом ϕ, переставляющим точки нашей шестёрки по циклу. При этом, если $\overline{abc}$ входит в цикл с коэффициентом λ, то $\phi^n(\overline{abc})$ — с коэффициентом $(-1)^n\lambda$.

Это условие разбивает наши 20 блоков на 4 орбиты. Просуммировав симплексы лежащие в каждой орбите с соответствующими коэффициентами, получаем 4 антиинвариантные цепи:

$$A=\begin{array}{cccccc} \overline{123} & -\overline{234} & +\overline{345} & -\overline{456} & +\overline{561} & -\overline{612} \\ -\overline{132} & +\overline{243} & -\overline{354} & +\overline{465} & -\overline{516} & +\overline{621} \\ -\overline{213} & +\overline{324} & -\overline{435} & +\overline{546} & -\overline{651} & +\overline{162} \\ +\overline{231} & -\overline{342} & +\overline{453} & -\overline{564} & +\overline{615} & -\overline{126} \\ +\overline{312} & -\overline{423} & +\overline{534} & -\overline{645} & +\overline{156} & -\overline{261} \\ -\overline{321} & +\overline{432} & -\overline{543} & +\overline{654} & -\overline{165} & +\overline{216} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{cccccc} \overline{124} & -\overline{235} & +\overline{346} & -\overline{451} & +\overline{562} & -\overline{613} \\ -\overline{142} & +\overline{253} & -\overline{364} & +\overline{415} & -\overline{526} & +\overline{631} \\ -\overline{214} & +\overline{325} & -\overline{436} & +\overline{541} & -\overline{652} & +\overline{163} \\ +\overline{241} & -\overline{352} & +\overline{463} & -\overline{514} & +\overline{625} & -\overline{136} \\ +\overline{412} & -\overline{523} & +\overline{634} & -\overline{145} & +\overline{256} & -\overline{361} \\ -\overline{421} & +\overline{532} & -\overline{643} & +\overline{154} & -\overline{265} & +\overline{316} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{cccccc} \overline{125} & -\overline{236} & +\overline{341} & -\overline{452} & +\overline{563} & -\overline{614} \\ -\overline{152} & +\overline{263} & -\overline{314} & +\overline{425} & -\overline{536} & +\overline{641} \\ -\overline{215} & +\overline{326} & -\overline{431} & +\overline{542} & -\overline{653} & +\overline{164} \\ +\overline{251} & -\overline{362} & +\overline{413} & -\overline{524} & +\overline{635} & -\overline{146} \\ +\overline{512} & -\overline{623} & +\overline{134} & -\overline{245} & +\overline{356} & -\overline{461} \\ -\overline{521} & +\overline{632} & -\overline{143} & +\overline{254} & -\overline{365} & +\overline{416} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{cc} \overline{135} & -\overline{246} \\ -\overline{153} & +\overline{264} \\ -\overline{315} & +\overline{426} \\ +\overline{351} & -\overline{462} \\ +\overline{513} & -\overline{624} \\ -\overline{531} & +\overline{642} \end{array}$$

Поскольку каждый симплекс входит в любой цикл вместе со своим блоком, а в любую антиинвариантную цепь вместе со своей орбитой, получаем что любой антиинвариантный цикл должен быть представим в виде линейной комбинации цепей A, B, C и D.

Вычислим границы этих цепей. Как было сказано выше, при вычислении границы каждого из блоков, все грани типа $\delta_{a.bc}$ и $\delta_{ab.c}$ сокращаются и остаётся только сумма граней типа δ_{ab} с правильными знаками. Поскольку каждая из цепей A, B, C и D является суммой блоков, можно считать что все грани типа $\delta_{a.bc}$ и $\delta_{ab.c}$ мы уже сократили и граница симплекса abc равна просто δ_{ab}.

Рассмотрим цепь A. Заметим, что граница первой строки сокращается с границей четвёртой строки (сдвигаем верхнюю строку на единицу влево, после чего соответствующие симплексы оказываются друг над другом). Аналогично, третья строка сокращается с последней. Значит, граница цепи A равна сумме границ второй и пятой строк.

$$\partial A = -\delta_{13} + \delta_{24} - \delta_{35} + \delta_{46} - \delta_{51} + \delta_{62} + \delta_{31} - \delta_{42} + \delta_{53} - \delta_{64} + \delta_{15} - \delta_{26}.$$

Заметим, что это с точностью до знака равно границе цепи D. Действительно, никакие две грани δ_{ab} из двенадцати входящих в границу D не сокращаются друг с другом. Поэтому граница D равна

$$\partial D = \delta_{13} - \delta_{15} - \delta_{31} + \delta_{35} + \delta_{51} - \delta_{53} - \delta_{24} + \delta_{26} + \delta_{42} - \delta_{46} - \delta_{62} + \delta_{64}.$$

Рассмотрим теперь цепи B и C. В их границы входит грань δ_{12}, которая не входит ни в границу A, ни в границу D. Значит, если в наш цикл входит цепь B с коэффициентом λ, то должна входить и цепь C с коэффициентом $-\lambda$. Вычислим границу цепи $B - C$.

Первая, вторая, третья и пятая строки B сокращаются соответственно с первой, четвёртой, третьей и шестой строками C. Границы четвёртой строки B и пятой строки C отличаются только знаком, так же как и границы шестой строки B и второй строки из C. Значит, граница $B - C$ равна удвоенной сумме границ шестой и четвёртой строк B:

$$\partial(B-C) = 2(-\delta_{42}+\delta_{53}-\delta_{64}+\delta_{15}-\delta_{26}+\delta_{31}+\delta_{24}-\delta_{35}+\delta_{46}-\delta_{51}+\delta_{25}-\delta_{36}).$$

Заметим, что это в точности $2\partial A$, или, что то же самое, $-2\partial D$.

Значит все антиинвариантные циклы представляются в виде линейных комбинаций следующих:

$$A + D, \qquad B - C + 2D.$$

1.6 Вырождения.

Посмотрим теперь что происходит с этими циклами при вырождении шестёрки в пятёрку. Достаточно посмотреть какая граница появится у этих циклов при склеивании точек 5 и 6. При таком вырождении шестёрки в базе, порядковый комплекс в слое преобразуется следующим образом. Поскольку точка 6 теперь неотличима от точки 5, каждая пара симлексов (любой размерности), обозначения которых переводятся друг в друга заменой 5 на 6, склеится в один симплекс. Поскольку для каждой пары 3-симплексов и для каждой пары 2-симплексов одинакового типа (δ_{ab}, $\delta_{ab.c}$ и $\delta_{a.bc}$) ориентация задавалась одинаково, ни при какой такой склейке сокращение не произойдёт. Следовательно, порядковый комплекс в слое над вырожденной шестёркой получается из исходного комплекса заменой 6 на 5 во всех обозначениях и последующим отождествлением всех симплексов с одинаковыми обозначениями. При этом образ границы совпадает с границей образа.

Вычислим образ каждого из полученных выше антиинвариантных циклов. После замены 6 на 5 во всех обозначениях, цепи A, B, C и D примут вид:

$$\overline{A} = \begin{array}{cccccc} \overline{123} & -\overline{234} & +\overline{345} & -\overline{455} & +\overline{551} & -\overline{512} \\ -\overline{132} & +\overline{243} & -\overline{354} & +\overline{455} & -\overline{515} & +\overline{521} \\ -\overline{213} & +\overline{324} & -\overline{435} & +\overline{545} & -\overline{551} & +\overline{152} \\ +\overline{231} & -\overline{342} & +\overline{453} & -\overline{554} & +\overline{515} & -\overline{125} \\ +\overline{312} & -\overline{423} & +\overline{534} & -\overline{545} & +\overline{155} & -\overline{251} \\ -\overline{321} & +\overline{432} & -\overline{543} & +\overline{554} & -\overline{155} & +\overline{215} \end{array}$$

$$\overline{B} = \begin{array}{cccccc} \overline{124} & -\overline{235} & +\overline{345} & -\overline{451} & +\overline{552} & -\overline{513} \\ -\overline{142} & +\overline{253} & -\overline{354} & +\overline{415} & -\overline{525} & +\overline{531} \\ -\overline{214} & +\overline{325} & -\overline{435} & +\overline{541} & -\overline{552} & +\overline{153} \\ +\overline{241} & -\overline{352} & +\overline{453} & -\overline{514} & +\overline{525} & -\overline{135} \\ +\overline{412} & -\overline{523} & +\overline{534} & -\overline{145} & +\overline{255} & -\overline{351} \\ -\overline{421} & +\overline{532} & -\overline{543} & +\overline{154} & -\overline{255} & +\overline{315} \end{array}$$

$$\overline{C} = \begin{array}{cccccc} \overline{125} & -\overline{235} & +\overline{341} & -\overline{452} & +\overline{553} & -\overline{514} \\ -\overline{152} & +\overline{253} & -\overline{314} & +\overline{425} & -\overline{535} & +\overline{541} \\ -\overline{215} & +\overline{325} & -\overline{431} & +\overline{542} & -\overline{553} & +\overline{154} \\ +\overline{251} & -\overline{352} & +\overline{413} & -\overline{524} & +\overline{535} & -\overline{145} \\ +\overline{512} & -\overline{523} & +\overline{134} & -\overline{245} & +\overline{355} & -\overline{451} \\ -\overline{521} & +\overline{532} & -\overline{143} & +\overline{254} & -\overline{355} & +\overline{415} \end{array}$$

$$\overline{D} = \begin{array}{cc} \overline{135} & -\overline{245} \\ -\overline{153} & +\overline{254} \\ -\overline{315} & +\overline{425} \\ +\overline{351} & -\overline{452} \\ +\overline{513} & -\overline{524} \\ -\overline{531} & +\overline{542} \end{array}$$

Заметим, что четвёртый и пятый столбцы $\overline{A}$ тождественно равны нулю. Все симплексы в них сокращаются. Поэтому $A + D$ переходит в

$$\overline{A}+\overline{D} = \begin{array}{cccccc} \overline{123} & -\overline{234} & +\overline{345} & -\overline{512} & +\overline{135} & -\overline{245} \\ -\overline{132} & +\overline{243} & -\overline{354} & +\overline{521} & -\overline{153} & +\overline{254} \\ -\overline{213} & +\overline{324} & -\overline{435} & +\overline{152} & -\overline{315} & +\overline{425} \\ +\overline{231} & -\overline{342} & +\overline{453} & -\overline{125} & +\overline{351} & -\overline{452} \\ +\overline{312} & -\overline{423} & +\overline{534} & -\overline{251} & +\overline{513} & -\overline{524} \\ -\overline{321} & +\overline{432} & -\overline{543} & +\overline{215} & -\overline{531} & +\overline{542} \end{array}$$

Рассмотрим теперь цикл $B-C+2D$. Пятые столбцы в B и C также равны нулю. Второй столбец B сократится со вторым столбцом C. Четвёртый столбец B сократится с шестым столбцом C. Шестой столбец B сократится с первым столбцом D. Четвёртый столбец C сократится со вторым столбцом D. Цикл $B-C+2D$ примет вид

$$\overline{B}-\overline{C}+2\overline{D} = \begin{array}{cccccc} \overline{124} & +\overline{345} & -\overline{125} & -\overline{341} & +\overline{135} & -\overline{245} \\ -\overline{142} & -\overline{354} & +\overline{152} & +\overline{314} & -\overline{153} & +\overline{254} \\ -\overline{214} & -\overline{435} & +\overline{215} & +\overline{431} & -\overline{315} & +\overline{425} \\ +\overline{241} & +\overline{453} & -\overline{251} & -\overline{413} & +\overline{351} & -\overline{452} \\ +\overline{412} & +\overline{534} & -\overline{512} & -\overline{134} & +\overline{513} & -\overline{524} \\ -\overline{421} & -\overline{543} & +\overline{521} & +\overline{143} & -\overline{531} & +\overline{542} \end{array}$$

Симплекс $\overline{123}$ входит в цикл $\overline{A}+\overline{D}$, но не входит в $\overline{B}-\overline{C}+2\overline{D}$. Поэтому никакая линейная комбинация этих циклов не равна нулю тождественно.

Следовательно, найденные нами циклы не являются циклами во всём разрешенном дискриминанта и, следовательно, не дают вклада в инварианты.

1.7 Гомологии страта f_2.

Рассмотрим пространство Ψ конфигураций вида $[(a,b,c,d),(x,y,z)]$, где (a,b,c,d) — четвёрка, (x,y,z) — тройка точек на окружности. Порядковый комплекс для таких (невырожденных) конфигураций является симплициальным подразбиением более простого комплекса. А именно конуса над открытым четырёхножником. Выброшенные вершины этого четырёхножника соответствуют трёхточечным подмножествам четвёрки (a,b,c,d). Гомологии этого комплекса порождаются циклами четырёхножника.

Конфигурационное пространство Ψ состоит из нескольких связных компонент, так как мы по разному можем расположить точки четвёрки относительно точек тройки. При этом возможен случай, когда какие-то две точки тройки оказываются соседними на окружности. Рассмотрим вырождение такой конфигурации, склеивающее две точки тройки. При таком вырождении порядковый комплекс конфигурации не изменяется. Действительно, вершина соответствующая тройке точек (a, b, c) превращается в вершину соответствующую паре (a, b) и условию $\phi'(a) = 0$. Значит, слои над невырожденными и вырожденными конфигурациями такого типа совпадают. То есть эта связная компонента пространства f_2 является расслоением над многообразием с непустым краем. Следовательно, циклов старшей размерности у неё нет и можно исключить эту компоненту связности из рассмотрения.

Остаются конфигурации, для которых каждые две точки тройки разделены точкой из четвёрки (а также их вырождения). Множество таких невырожденных конфигураций связно и гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^6$, в частности ориентируемо. Гомологии слоя над внутренностью этой связной компоненты нам уже известны. Они порождаются замкнутыми циклами четырёхножника с выброшенными пятками ног. То есть их пространство изоморфно $\mathbb{Z}^3$. Посмотрим, что происходит с этими циклами при устремлении точки базы к границе.

Для начала рассмотрим внутренние вырождения. В конфигурации $[(a, b, c, d), (x, y, z)]$ всегда есть две точки из четвёрки, соседние на окружности. Допустим, это точки a и b. Посмотрим что происходит с комплексом при сталкивании этих точек. Вершины четырёхножника, соответствующие тройкам (a, c, d) и (b, c, d), склеиваются. Вместе с ними склеиваются и соответствующие двумерные грани. Таким образом, цикл $\xi = (a, c, d)$ - (b, c, d) перейдёт в ноль, а все остальные циклы — во что-то ненулевое. Значит единственный цикл, претендующий на ненулевой вклад в инварианты — цикл ξ.

Далее нужно проверить, является ли ξ циклом во всём пространстве $F_5 \setminus F_4$. Для этого необходимо вычислить его границу при всевозможных сталкиваниях точки из тройки и точки из четвёрки в базе.

Эта граница — некоторый двумерный цикл в страте f_1. Необходимо выяснить, является ли этот цикл границей какой-нибудь трёхмерной цепи пространства f_1. Если нет, значит ξ не продолжается до цикла во всём члене $F_5 \setminus F_4$. В противном случае мы получим цикл пространства $F_5 \setminus F_4$, претендующий на вклад в инварианты. И для этого цикла нужно будет также вычислять границу при приклеивании меньших членов фильтрации. Эти вычисления будут проделаны в ближайшее время.

Список литературы

[1] Arnold V. I. (1994). *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, Singularities and Bifurcations, Advances in Soviet Math., vol.21, Amer. Math Soc. Providence, RI, 33-91.

[2] Merkov A. B. (n.d.). *Vassiliev invariants classify plane curves and doodles*, Mat. Sbornik 194:9, 31-62.

[3] Vassiliev V. A. (1999) *On finite order invariants of triple point free plane curves*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. **194**, 275-299.